UNISAT **Année 2019-2020**
Licence 3

TD 1 de Programmation linéaire

Exercice 1

On désire déterminer la composition, à coût minimal, d'un aliment pour bétail qui est obtenu en mélangeant au plus deux produits bruts : orge et arachide.

- la quantité nécessaire par portion est de 400g.
- l'aliment ainsi fabriqué devra comporter au moins 30% de protéïnes et au plus 5% de fibres.

On a les données suivantes :

quantité par gramme d'aliment

Aliment	Protéïne	Fibres	Coût (F/kg)
orge	0,09	0,02	450
arachide	0,60	0,06	500

Modéliser le problème sous forme d'un programme linéaire.

Exercice 2

Une société produit des biens A, B, et C. La production des biens nécessite l'utilisation de 4 machines. Les temps de production et les profits générés sont repris dans le tableau suivant.

	1	2	3	4	Profit
A	1	3	1	2	6
B	6	1	3	3	6
C	3	3	2	4	6

Les temps de production disponibles sur les machines 1, 2, 3 et 4 sont de 84, 42, 21 et 42 et la société cherche à maximiser son profit. Formuler ce problème comme un problème d'optimisation linéaire.

Exercice 3

Une entreprise pharmaceutique fabrique trois types de médicaments : des somnifères, des euphorisants et des analgésiques, dont les bénéfices de production escomptés sont respectivement de 20, 20 et 10 millions de francs par kilo.

Pour fabriquer chacun de ces médicaments, trois matières premières sont utilisées : de la caféïne, de la valériane et de la morphine. Les quantités nécessaires de ces produits pour fabriquer un kilo de médicaments sont résumées dans le tableau suivant :

	Somnifères	euphorisants	analgésiques
caféïne	0	2	4
valériane	4	0	0
morphine	4	1	4

Par ailleurs les quantités de caféïne, valériane et morphine sont limitées par leur production à respectivement 2, 4 et 2 unités par jour.

Le but de l'exercice est de planifier les quantités de médicaments à produire afin de maximiser le bénéfice quotidien.

1) Modéliser le problème sous forme d'un programme linéaire (P).

Exercice 4

Une fermière veille à ce que ses poulets absorbent chaque jour 24 unités de fer et 8 unités de vitamines.

Le maïs procure 2 unités de fer et 5 unités de vitamines. Une nourriture à base d'os procure 4 unités de fer et 1 unité de vitamines. Le millet procure 2 unités de fer et 1 unité de vitamines.

Comment cette fermière devra-t-elle mélanger ces trois aliments de façon à satisfaire au moindre coût les exigences d'ingestion quotidiennes de ses poulets, sachant que les trois aliments coûtent respectivement 4000, 2000 et 6000 unités monétaires. Formuler seulement le problème à résoudre.

Exercice 5

Un atelier de finition d'une entreprise fabrique des pièces mécaniques de deux types : A et B, à partir des pièces que lui fournit l'atelier de moulage ; ces pièces brutes permettent la fabrication de l'un ou l'autre des types A et B, indifféremment.

La capacité journalière de production de l'atelier de moulage est de 130 unités.

Ces pièces moulées subissent ensuite, dans l'atelier de finition, un usinage et un traitement thermique.

L'usinage d'une pièce de type A nécessite 2 heures de travail sur machine, celui d'une pièce de type B nécessite 3 heures.

Le traitement thermique demande 3 heures pour une pièce de type A et 1 heure pour une de type B. Les disponibilités en main d'oeuvre sont telles que 340 heures-machine peuvent être effectuées à l'usinage et 290 heures au traitement thermique, chaque jour.

Après fabrication, les pièces sont ensuite vérifiées. Compte tenu des effectifs des vérificateurs, 90 pièces de type A et 100 de type B peuvent être vérifiées par jour.

L'entreprise commercialise ces pièces : la marge unitaire sur coût variable pour les pièces de type A est évaluée aux trois quarts de celle relative aux pièces de type B.

Ecrire le programme linéaire permettant de déterminer un programme journalier optimal de fabrication pour l'atelier de finition.

Exercice 6

1) Un grossiste désire renouveller son stock de savon. Il s'adresse à trois fabricants F_1, F_2, et F_3 pour une commande globale de 20 unités (une unité=100kg). Il est cependant tenu d'acheter une quantité non nulle aux deux fabricants F_1 et F_2.

Quelles sont les commandes à passer à chacun de ces fournisseurs de manière à avoir une dépense minimale, si l'on sait que

- F_1 peut fournir au maximum 10 unités, mais n'accepte jamais de commandes inférieures à 5 unités ;

  F_2 peut fournir au maximum 8 unités, mais n'accepte jamais de commandes inférieures à 4 unités ;

  F_3 peut fournir au maximum 9 unités.

- Les prix d'achat unitaires (en centaines de francs) auprès de chaque fabricant sont les suivants :

$$F_1 : \begin{cases} 11 \text{ pour les 5 premières unités} \\ \ 9 \text{ pour les unités suivantes ;} \end{cases}$$

F_2 : 8

F_3 : 10

Exercice 7

Une usine fabrique quatre produits (A, B, C et D), au moyen de deux machines (M_1, et M_2). Les temps-machines requis par unité de volume de chacun de ces produits sont donnés ci-dessous, ainsi que les bénéfices unitaires correspondants (par exemple : pour fabriquer 100 litres de A, M_1 est utilisée 7 minutes, puis M_2 3 minutes ; à ces 100 litres correspond un bénéfice de 45 unités monétaires).

	Temps requis (minutes)				
	Produits	A	B	C	D
Machine					
M_1		7	10	4	9
M_2		3	40	1	1
Bénéfices		45	100	30	50

La disponibilité journalière de M_1 est de 1200 minutes ; celle de M_2 est de 800 minutes. On suppose qu'aucun problème d'ordonnancement ne vient compliquer les choses (utilisation simultanée des machines, etc.).

Quelle quantité de chaque produit faut-il fabriquer chaque jour de façon à maximiser le bénéfice, donner seulement le modèle mathématique de ce problème.

Exercice 8

Quatre machines M_1, M_2, M_3 et M_4 permettent de fabriquer 3 produits P_1, P_2, P_3. Une unité du produit P_1 est composé de deux eléments fabriqués respectivement par M_1et M_3 ; une unité du produit P_2 est composé de trois éléments fabriqués respectivement par M_2, M_3 et M_4 ; une unité du produit P_3 est composé de trois éléments fabriqués respectivement par M_1, M_2 et M_4.

Afin d'obtenir un rendement suffisant, les machines M_1, M_2, M_3 et M_4 doivent produire journellement une quantité minimale valant respectivement 10, 12, 8 et 10 unités.

On se propose de déterminer les quantités de P_1, P_2 et P_3 à produire de manière à minimiser le coût total de production, si les coûts de production de P_1, P_2 et P_3 valent respectivement 2, 3 et 4 unités monétaires. Ecrire le programme linéaire correspondant.

Exercice 9

Les produits d'une société anonyme sont conditionnés dans des récipients de deux type A et B. Afin de pouvoir satisfaire la clientèle, le Directeur de la société se fixe comme objectif annuel de disposer d'au moins 3 200 000 récipients de type A et d'au moins 400 000 récipients de type B.

Pour produire ces récipients, le Directeur dispose de deux ateliers dont les rendements sont differents

Nombre de récipients par heure de fonctionnement

	Atelier 1	Atelier 2
Récipient type A	500	400
Récipient type B	400	320

Chaque atelier fonctionne au maximum 4 000 heures dans l'année. Les prévisions de coût variable de production de chaque type de récipient donnent comme résultats :

Coûts variables de production en unité monétaire (u. m.)

	Atelier 1	Atelier 2
Récipient type A	0.4	0.55
Récipient type B	0.75	0.85

Mais le Directeur peut également sous traiter la fabrication de ces récipients à une société qui propose comme tarifs :

0.55u. m. le récipient de type A

1u. m. le récipient de type B

Donner la formulation mathématique du problème correspondant à un programme de production optimale.

Exercice 10

Mettre les programmes linéaires suivants sous forme standard, sous forme canonique :

1°) $\max \quad Z = 3x_1 + 4x_2 + 10x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 \leq 3 \\ x_2 + x_3 \leq 3 \\ -2 \leq x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \;\; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2°) $\min \quad Z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 \leq 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 1 \\ x_1 \in \mathbb{R}, \;\; x_2 \geq 0, \;\; x_3 \leq 0 \end{cases}$$

Exercice 11

Résoudre par la méthode graphique les programmes linéaires uivants :

a) $\max \quad Z = 3x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1, \;\; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

b) $\min Z = x_1 - 3x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, \;\; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

c) $\max \quad Z = x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} x_2 \leq 9 \\ -x_1 + x_2 \leq 5 \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 50 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1, \;\; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

d) $\max \quad Z = x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 12 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1, \;\; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

e) $\max \quad Z = 3x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, \;\; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

f) $\max \quad Z = x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1, \;\; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 12

Résoudre par la méthode du simplexe les programmes linéaires suivants :

1°) $\min \quad Z = -x_1 + 9x_2 - 6x_3$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 15 \\ -5x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 \leq 3 \\ x_1, \;\; x_2, \;\; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2°) $\max \quad Z = 4x_1 + 5x_2 + x_3$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 + 4x_2 \leq 11 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13 \\ x_1, \;\; x_2, \;\; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

3°) $\min \quad Z = 10x_1 - 30x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 6x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, \;\; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4°) $\max \quad Z = 4x_1 + 5x_2 + x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 8 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1, \;\; x_2, \;\; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 13

On considère le problème diététique suivant. Il s'agit d'acheter à un coût minimum des fruits, des légumes et de la viande afin d'obtenir suffisamment de vitamines A et B. Pour une alimentaion saine, on considère qu'il faut consommer 11 unités de vitamines A et 4 unités de vitamines B. les valeurs nutritives des aliments (par unité de poids) sont données dans le tableau ci-dessous.

	Légumes	Fruits	Viande
Vitamine A	1	5	1
Vitamine B	2	1	1

Les coûts par unité de poids des aliments sont de 3 (légumes), 2 (fruits) et 10 (viande). Modelisez ce problème et résolvez-le.

Exercice 14

Une entreprise de mécanique fabrique, dans son usine, 3 types de pièce a, b, c dans 3 ateliers : usinage, montage, finition. Le tableau ci-dessous résume.

	nombre d'heures machines nécessaires pour fabriquer une pièce			Prix de vente de la pièce
	usinage	montage	finition	
pièce a	0.10	0.15	0.15	35.50
pièce b	0.20	0.15	0.25	51.50
pièce c	0.40	0.45	0.15	92.50
coût variable de l'heure	60	80	50	
Capacité de l'atelier (en heures/mois)	2000	2400	2400	

1) Déterminer le programme de fabrication permettant à l'usine d'obtenir un bénéfice maximum (on suppose que la totalité des charges variables sont reparties par l'intermédiaire des trois centres d'analyse).

2) Déterminer le dual du programme linéaire obtenu dans la question 1). Donner une interprétation économique de ce programme dual.

Exercice 15

Quatre machines M_1, M_2, M_3 et M_4 permettent de fabriquer 3 produits P_1, P_2, P_3. Une unité du produit P_1 est composé de deux eléments fabriqués respectivement par M_1et M_3 ; une unité du produit P_2 est composé de trois éléments fabriqués respectivement par M_2, M_3 et M_4 ; une unité du produit P_3 est composé de trois éléments fabriqués respectivement par M_1, M_2 et M_4.

Afin d'obtenir un rendement suffisant, les machines M_1, M_2, M_3 et M_4 doivent pruduire journellement une quantité minimale valant respectivement 10, 12, 8 et 10 unités.

Déterminer les quantités de P_1, P_2 et P_3 à produire de manière à minimiser le coût total de production, si les coûts de production de P_1, P_2 et P_3 valent respectivement 2, 3 et 4 unités monétaires.

Exercice 16

La société Fourivoire fabrique deux types de fours F1 et F2 à partir de trois facteurs de production :

M (heures machines) ; O (heures ouvriers) ; T(heures techniciens).

Les combinaisons de facteurs de production pour chaque type de fours, le prix de vente de chaque four ; V,

le coût unitaire en francs : C de chaque facteur de production et les capacités hebdomadaires : Kde chaque atelier sont donnés dans le tableau suivant :

	M	O	T	V
F_1	5	7	4	2010
F_2	3	8	6	2400
C	20	30	50	
K	270	800	360	

1°) Déterminer combien de fours de chaque type la societé Fourivoire doit fabriquer chaque semaine pour maximiser sa marge sur coût de production.

2) Déterminer le dual du programme linéaire obtenu dans la question 1). Donner une interprétation économique de ce programme dual. Résoudre le programme linéaire de la question 1) et en déduire une solution optimale du dual.